Ein Vorschlag zur interaktiven Einführung von Hüllkurven

Candy Walter

Die hier beschriebenen Unterrichtsstunden zeigen eine Möglichkeit für die Einführung von Hüllkurven am Beispiel eines Internetbeitrags. Die dort aufgeworfene Fragestellung *„Passt der Van in die Garage?“* lässt sich mithilfe der mathematischen Modellierung eines schwingenden Garagentors als Funktionenschar und der Herleitung der durch die Scharbewegung entstehenden Hüllkurve beantworten. Durch die Bewegung der Geraden können die Schüler/innen die Hüllkurve als „einhüllende Randkurve“ mit GeoGebra interaktiv entdecken und die Hüllfunktion mit ihrem grafikfähigen Taschenrechner (GTR) bestimmen.

1 Einleitung

Die hier beschriebene Unterrichtsequenz fand in einem 12. Jahrgang mit erhöhtem Anforderungsniveau (früher Leistungskurs) in Hannover statt und beanspruchte zwei 90-minütige Doppelstunden. Die Stunden gehörten zur Unterrichteinheit der „Funktionenscharen“, die im Vorfeld gemäß curricularer Vorgaben des Landes Niedersachsen eingeführt und diskutiert wurden (Niedersächsisches Kultusministerium, 2009, S. 36). Die Schwerpunktsetzung der Unterrichtssequenz basiert auf den Rahmenvorgaben, die durch die Bildungsstandards im Fach Mathematik für die allgemeine Hochschulreife empfohlen werden. Hier wird unter anderem verlangt, die „funktionalen Vorstellungen aus der Sekundarstufe I mit Begriffen und Verfahren der elementaren Analysis zu vertiefen und den Funktionsbegriff durch vielfältige Beispiele zu erweitern“ (KMK, 2012, S. 20). Zusätzlich wurde bei der mathematischen Modellierung eines Garagentors mit einer Funktionenschar und bei der Bestimmung der hierdurch entstehenden Hüllfunktion der GTR (Firma: Casio, Modelltyp fx-9860G) eingesetzt.

2 Einführung der Forumsfrage und erste Überlegungen zum Hüllkurvenbegriff

Um eine möglichst breite Aktivierung zu schaffen und die Schüler/innen für das Unterrichtsvorhaben zu motivieren, begann der Einstieg mit der Folienpräsentation einer aus dem Internet stammenden Fragestellung (Motor Talk, 2007), die die Lernenden direkt mit der Stundenfrage konfrontierte (Abb. 1). Der Forumsbeitrag wurde für die Lerngruppe modifiziert und durch das Bild eines Multivanbus (Modell T5, Maße originalgetreu) ergänzt.

Es ergibt sich das Problem, dass das Auto zwar formal in die Garage passt, der Abstand zum Tor jedoch so gering ist, dass es fraglich bleibt, ob das Auto nicht doch beschädigt wird, wenn sich das Tor schließt. Um den Lernenden die gegebene Situation zu verdeutlichen und das Problem zu konkretisieren, wurde mithilfe einer vorbereitenden 3-dimensionalen GeoGebra-Darstellung die Garagentorbewegung visualisiert (Abb. 2).

Einige Lernende konnten mithilfe einer Bluetooth-Maus den Schieberegler von ihrem Platz aus bedienen und bei Bedarf die

Abb. 1. Der für die Lerngruppe zugeschnittene Internetbeitrag

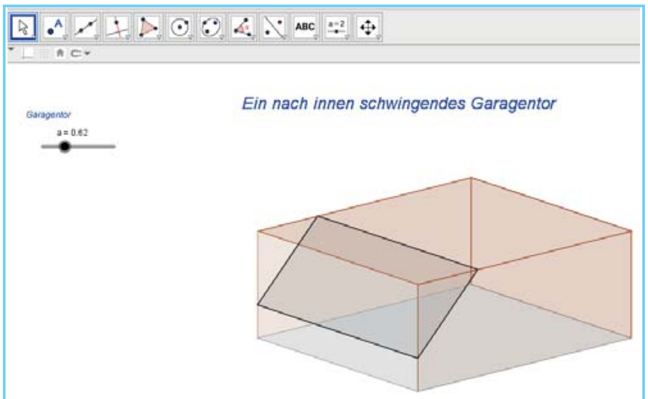

Abb. 2. Vorbereitete 3-dimensionale GeoGebra-Visualisierung des schwingenden Garagentores

Perspektive der Garage verändern. Mithilfe der bildlichen Darstellung konnten verschiedene Aufforderungen an die Schüler/innen gerichtet werden, wie z. B. *„Erläutern Sie den Nachteil, den ein nach innen schwingendes Garagentor mit sich bringt"*. Die eingesetzte 3-dimensionale Visualisierung bot gerade leistungsschwächeren Lernenden die Chance, die Problemsituation durch einen visuellen Zugang zu erfassen, sodass auch sie die Nachteile eines nach innen schwingenden Garagentores erläutern konnten. Die Schüler/innen erkannten, dass ein Teil des Garageninnenraums verloren geht und der Van nicht direkt hinter dem Tor stehen darf, wenn dieses geschlossen wird. Mit Bezug zur Ausgangssituation sollten die Schüler/innen nachfolgend die gegebene Fragestellung *„Passt der Van in die Garage?"* mithilfe mathematischer Überlegungen beantworten.

Erste Überlegungen führten dazu, dass die Lernenden verschiedene Stellungen des Garagentores in ihr Heft zeichneten. Einige zeichneten die verschiedenen Torstellungen in ein Bild, andere in mehreren Bildern, wobei in letzterem die Hüllkurve als Einhüllende der Garagentorstellungen nicht zu erkennen gewesen ist. Um dies allen Lernenden zu ermöglichen, wurde eine vorbereitete 2-dimensionalen GeoGebra-Visualisierung eingesetzt (Abb. 3). Je mehr Torstellungen hinzukamen, desto deutlicher wurde ein „Rand" (die Hüllkurve) sichtbar, der durch die einzelnen Bewegungen des Tores entstand. Dies führte bei den Schüler/inne/n zu den folgenden zwei wichtigen Beobachtungen, die an der Tafel gesichert wurden (Abb. 4) – wobei hier als Hinführung zur allgemeinen Hüllkurvendefinition zunächst der von den Lernenden geäußerte Begriff „Rand" als vorläufige „Arbeitsdefinition" verwendet wurde:

- *„Durch die verschiedenen Torstellungen entsteht ein Rand."*
- *„Beim Schließen des Tores geht Garageninnenraum verloren (oberhalb des Randes)."*

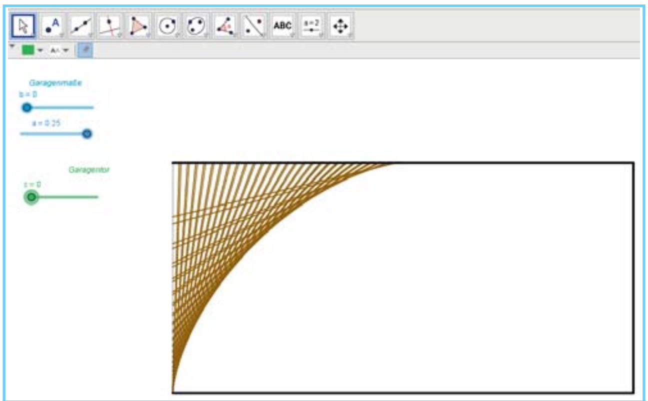

Abb. 3. Vorbereitete 2-dimensionale GeoGebra-Visualisierung des schwingenden Garagentores. Durch die „Bewegung des Tores" wird die Hüllkurve als untere „Randkurve" deutlich sichtbar

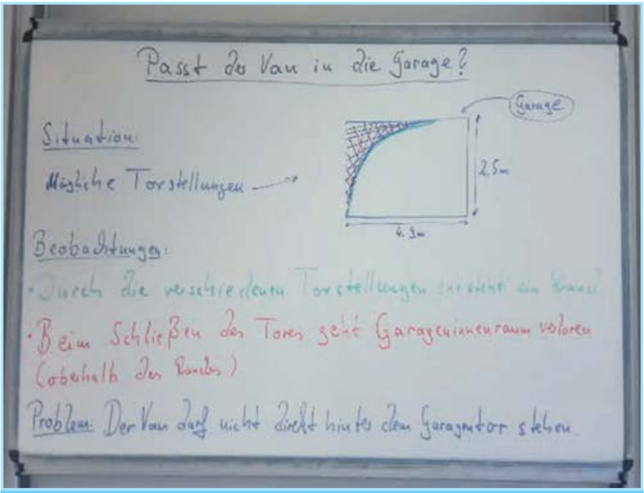

Abb. 4. Tafelbild mit ersten Überlegungen. Unterhalb der 2-dimensionalen Situationsskizze wurden zwei wichtige Beobachtungen der Schüler/innen festgehalten und das Problem konkretisiert

3 Die Mathematisierung des Problems und die Bestimmung der Hüllkurve

3.1 Herleitung der Geradenschar

Im nächsten Arbeitsschritt sollte die Hüllkurve mathematisch hergeleitet werden, um den vom Geragentor verursachten Gefahrenbereich vollständig beschreiben zu können. Als Hilfsmittel diente den Lernenden neben ihrem GTR ein Arbeitsblatt, das alle relevanten Daten und eine Querschnittsskizze der Garage (ohne Koordinatensystem) beinhaltete (siehe Online-Ergänzung zu diesem Beitrag).

Nach der Festlegung des Koordinatensystems wurde als erstes die Funktionsgleichung der Geradenschar aufgestellt. Hierzu mussten die Schüler/innen zunächst die Bewegung des Garagentores mathematisch als Geradenschar interpretieren. Diese Tatsache entdeckten die Lernenden unterstützt durch die GeoGebra-Darstellung aus Abbildung 3 schnell. Hierzu „erzeugte" ein Schüler durch langsame Bewegungen des Schiebereglers einzelne Torstellungen, die als Geraden einer Schar interpretiert wurden. Um diese Schargerade mit ihrer Hüllkurve bestimmen zu können, mussten die Lernenden zunächst zwei allgemeine Punkte festlegen, die eine beliebige Stellung des Garagentores in Abhängigkeit zweier Parameter a und b beschrieben. Aus diesen konnten sie dann die Steigungen der einzelnen Geraden bestimmen. Während der Bearbeitung machten die Schüler/innen verschiedene Vorschläge, um die Geradenschar aufzustellen. Einige Lernende kamen auf die Idee, die Schnittpunkte der Schargeraden mit den Führungsschienen am Dach (Parallele zur x-Achse) und der Garageninnenwand (y-Achse) zu bestimmen und hierdurch eine 2-parametrige Geradenschar aufzustellen. Diese ergibt sich aus der berechneten Steigung und einem allgemeinen Punkt aus der Punkt-Steigungs-Formel. Die Überlegungen der Schüler/innen zur Mathematisierung der Aufgabenstellung wurden im Plenum zusammengetragen und an der Tafel gesichert (Abb. 5). Es wurde zudem die bis dato verwendete Arbeitsdefinition „Randkurve" durch den mathematisch korrekten Fachbegriff Hüllkurve abgelöst.

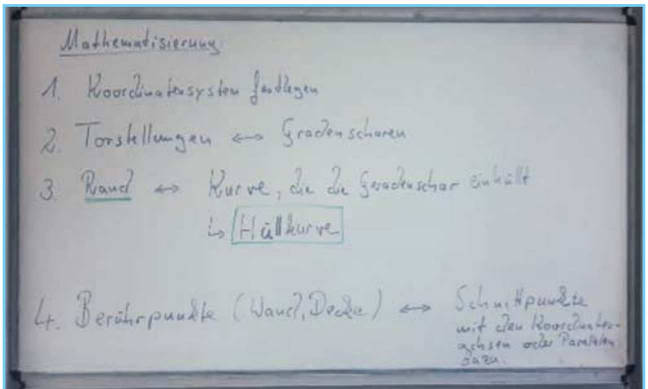

Abb. 5. Tafelbild der von den Schüler/inne/n vorgenommenen Mathematisierung

Abbildung 6 spiegelt das Ergebnis einer Schülerin wider, die die Funktionsgleichung der Gradenschar in Abhängigkeit der Parameter a und b richtig aufstellte.

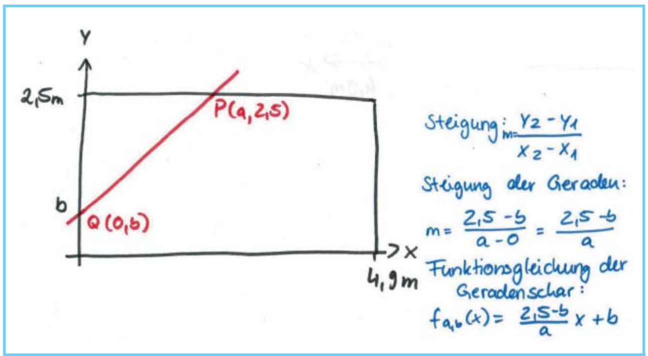

Abb. 6. Schülerbeispiel für die Herleitung der 2-parametrigen Geradenschar

Die Bestimmung der 1-parametrigen Geradenschar gelang den Schüler/innen hingegen nicht. Die Lernenden kamen nicht auf die Idee, mithilfe des Satzes von PYTHAGORAS den Parameter b in Abhängigkeit von a zu bestimmen. Stattdessen formten einige die Gleichung $f_{a,b}$ aus Abbildung 6 nach b um und setzten das Ergebnis wieder in $f_{a,b}$ ein (Abb. 7).

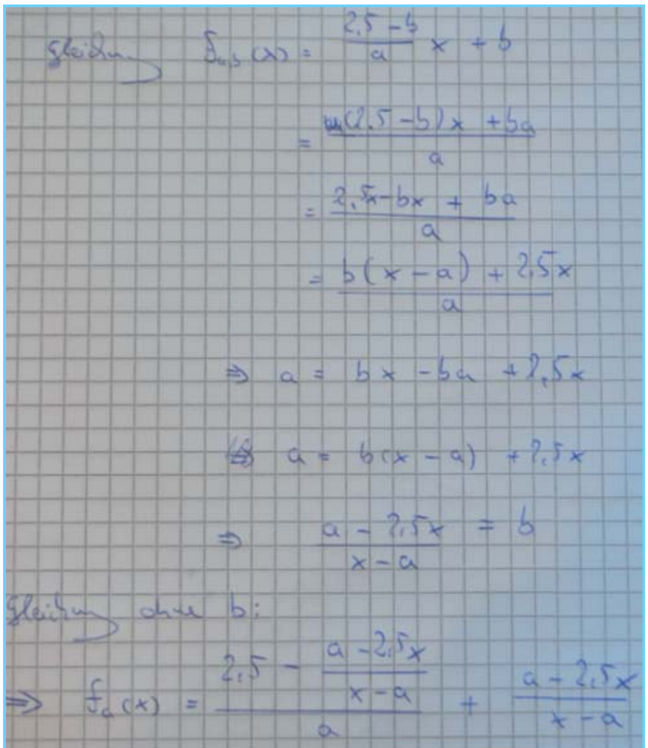

Abb. 7. Ergebnis einer fehlerhaften Umformung. Ein Schüler formt die Gleichung $f_{a,b}$ nach den Parameter b um und setzt das Ergebnis wieder in $f_{a,b}$ ein

Andere wiederrum verwendeten feste Werte für den Parameter a oder versuchten mithilfe einer Flächenberechnung $a \cdot b = 7{,}4$ die Funktionsgleichung f_a zu bestimmen. Dass die aufgestellten Gleichungen nicht richtig waren, konnten die Lernenden leicht mit ihren GTRs überprüfen. Letztlich wurde im Plenum die Gleichung f_a mithilfe des Satzes von PYTHAGORAS $2{,}5^2 = a^2 + (2{,}5 - b)^2$ mit $a, b \in (0; 2{,}5)$ herausgearbeitet. Freistellen nach b und Einsetzen in $f_{a,b}$ ergab schließlich die gesuchte Geradenschar

$$f_a(x) = \frac{\sqrt{2{,}5^2 - a^2}}{a}x - \sqrt{2{,}5^2 - a^2} + 2{,}5,$$

die die Stellungen des Garagentores für $a \in (0; 2{,}5)$ modelliert und die Hüllkurve aus Abbildung 3 erzeugt.

3.2 Die Bestimmung der Hüllkurvengleichung

Im letzten Schritt sollten die Lernenden die Stundenfrage klären und damit die Rückinterpretation von mathematischem Modell auf die Realität vornehmen. In einer kurzen Partnerarbeitsphase sollten erste Ideen zur Hüllkurve diskutiert werden. Hier wurde die Hüllkurve durch mögliche Funktionsverläufe von den Schüler/inne/n mithilfe des GTRs angenähert. Vermutungen, dass die gesuchte Hüllkurve das Stück einer nach unten geöffneten, gestauchten und entlang der x-Achse verschobenen Parabel, einer kubischen Funktion oder einer Wurzelfunktion darstellt, wurden genannt.
Unterstützt durch GeoGebra sollten die Schüler/innen beschreiben, wie oft jede Gerade der Schar die Hüllkurve berührt. Hierzu wurde zunächst die „Randkurve“ der Geradenschar aus Abbildung 3 durch einen roten Polygonzug nachgezogen (Abb. 8, links). Anschließend wurde die Schar gelöscht und nachfolgend einzelne Geraden zur Hüllkurve wieder hinzugefügt (Abb. 8, rechts). Die Vorgehensweise führte dazu, dass die Lernenden eine wichtige charakteristische Eigenschaft der Hüllkurve erkannten und einsahen, dass *jede Schargerade mit der Hüllkurve genau einen Punkt gemeinsam hat*.

Für die Bestimmung der Hüllfunktion kamen einige Lernende auf die Idee, ihre für die Hüllkurve vermuteten Funktionen mit der Geradenschar f_a gleichzusetzen. Dies führte bspw. im Fall von $y = \sqrt{x}$ zur Gleichung:

$$\frac{\sqrt{2{,}5^2 - a^2}}{a}x - \sqrt{2{,}5^2 - a^2} + 2{,}5 = \sqrt{x}.$$

Mithilfe der CAS-Funktion von GeoGebra konnte leicht gezeigt werden, dass hier zwei Lösungen vorliegen und somit $\sqrt{x}$ als Funktion für die gesuchte Hüllkurve nicht infrage kam. Entsprechend einfach ließen sich auch die anderen Funktionsvermutungen der Lernenden überprüfen.

Dass die Hüllfunktion durch Elimination des Scharparameters a aus der Gleichung f_a durch Nullsetzen ihrer partiellen Ableitung nach dem Parameter a, d. h. durch $\frac{df_a}{da} = 0$ gewonnen werden kann, wurde den Schüler/inne/n anhand geometrischer Überlegungen im Plenum exemplarisch verdeutlicht. Hierzu wurden zwei „benachbarte Geraden“ der Schar (f_a und f_{a+h}) mit den Parameterwerten a und $a + h$ ($h \neq 0$) betrachtet, die die Hüllkurve an zwei verschiedenen Punkten berühren. Je kleiner der Wert h, z. B. für $h > 0$, gewählt wird, desto mehr nähern sich die Berührpunkte einander an. Das heißt aber auch, die beiden Geraden rücken zusammen und unterscheiden sich immer weniger voneinander. Strebt h gegen 0, so erhält man schließlich bei variablem a und festem x

$$\lim_{h \to 0} \frac{f_{a+h}(x) - f_a(x)}{h} = 0,$$

dies entspricht der partiellen Ableitung nach dem Scharparameter. Der Ausdruck erinnerte die Lernenden an den bekannten *Differenzialquotienten*, der bei der Einführung in die Differenzialrechnung eine wichtige Rolle spielt und dort behandelt wurde.

Die Ableitung nach dem Parameter a erfolgte in Einzelarbeit und stellte eine gute Wiederholung zum Vertiefen einiger Ableitungsregeln dar. Abbildung 9 zeigt eine Schülerlösung, bei der die einzelnen Summanden der Geradenschar separat abgeleitet und anschließend wieder zusammengefasst wurden. Mithilfe der Ableitung gelang es, den Parameter a zu isolieren $\left(a = \sqrt[3]{2{,}5^2 x}\right)$ und die Hüllfunktion zu bestimmen.

Alternativ kann auch hier die CAS-Funktion von GeoGebra zur Differenzierung von f_a verwendet werden. Den bestimmten Parameter a setzten die Schüler/innen in die Schargrade ein und erhielten so die gesuchte Gleichung für die Hüllkurve:

$$H(x) = \frac{\sqrt{2{,}5^2 - \sqrt[3]{2{,}5^2 x}^2}}{\sqrt[3]{2{,}5^2 x}}x - \sqrt{2{,}5^2 - \sqrt[3]{2{,}5^2 x^2}} + 2{,}5.$$

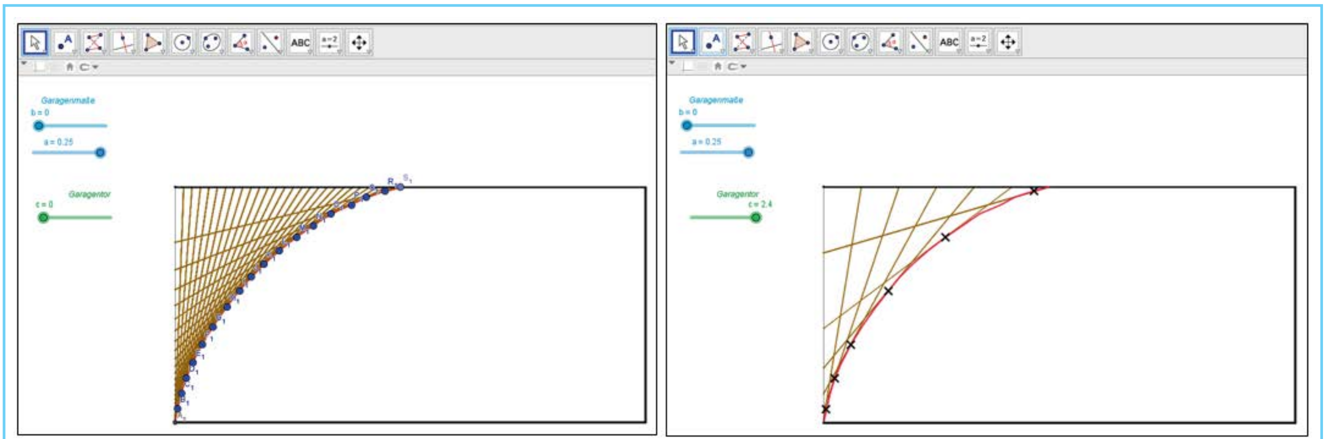

Abb. 8. Illustration zum Verständnisaufbau der charakteristischen Eigenschaft der Hüllkurve (von links nach rechts). Der rechten Darstellung kann exemplarisch entnommen werden, dass die Hüllkurve in jedem ihrer Punkte von einer Geraden der Schar berührt wird

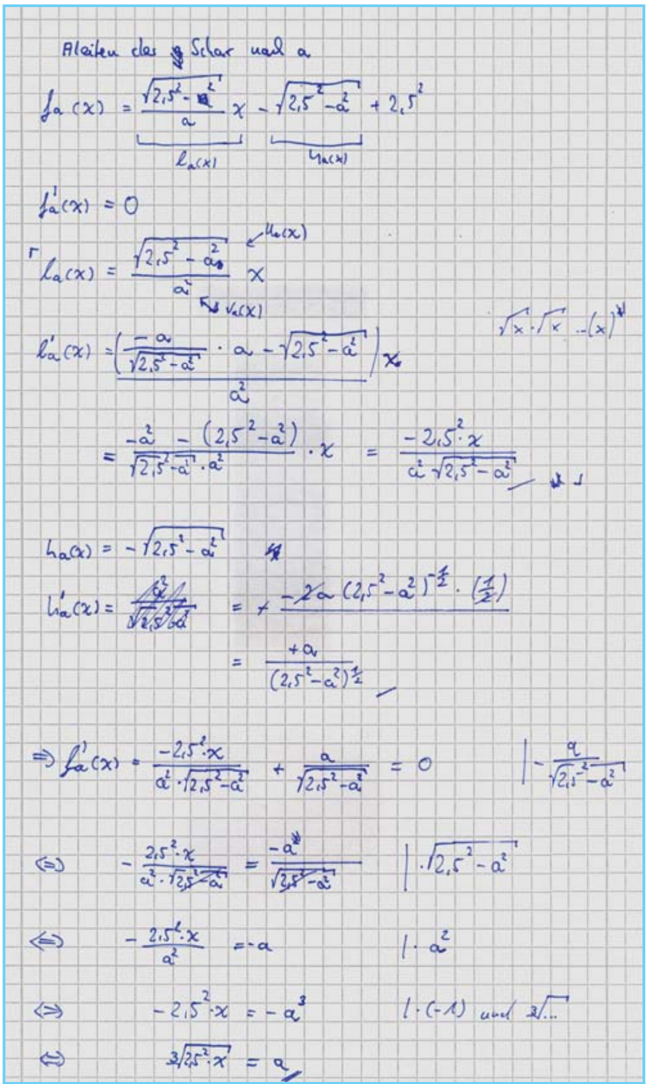

Abb. 9. Ergebnis der Ableitung und Umformung nach dem Scharparameter a der Funktion f_a

Das Ergebnis wurde mit der Grafikfunktion des GTRs überprüft (Abb. 10). Darüber hinaus könnte mithilfe der Trace-Funktion annäherungsweise die Stelle für den x-Wert ($x \approx 1{,}25$) ermittelt werden, die den Mindestabstand des Vans vom Tor innerhalb der Garage angibt.

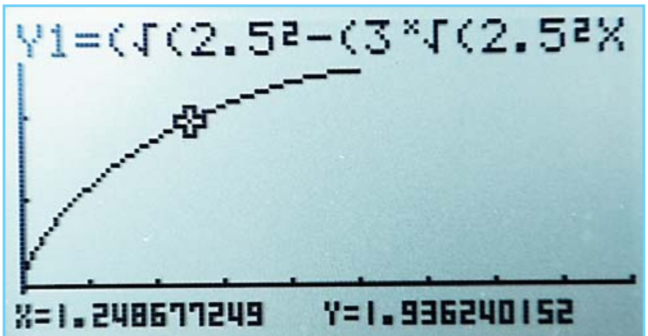

Abb. 10. Die im GTR dargestellte Hüllkurve. Mithilfe der Trace-Funktion konnte für $H(x) = y \approx 1{,}94$ (Höhe des Vans) der Mindestabstand $x \approx 1{,}25$ des Vans vom Garagentor näherungsweise abgelesen werden

Den exakten x-Wert sollten die Lernenden mit ihrem GTR durch Gleichsetzen ($H(x) = 1{,}95$) berechnen (Abb. 11) und das Ergebnis bezogen auf die Aufgabenstellung entsprechend interpretieren. Mit der Gesamtlänge des Vans (4,6 m) und der berechneten Schnittstelle (1,3 m) wurde – aufgrund der vorliegenden Garagengeometrie – schnell klar (4,6 m + 1,3 m = 5,9 m), dass der Van bei einem sich schließenden Garagentor nicht in der Garage stehen sollte.

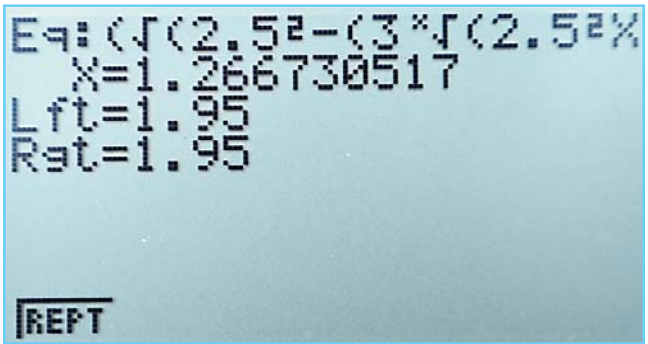

Abb. 11. Ergebnis der durchgeführten Schnittstellenberechnung mit dem GTR. Der Van sollte in der Garage mindestens 1,3 Meter vom Tor entfernt stehen, was hinsichtlich der Van-Länge und der Garagengeometrie nicht möglich ist

Einige Schüler/innen überprüften zudem, ob der Wagen eventuell rückwärts eingeparkt werden könnte. Auch hier ließ sich leicht zeigen ($H(x) = 1{,}48$ m), dass das Tor den Van beschädigt. Durch Hinzuschalten des Vans in die GeoGebra-Visualisierung aus Abbildung 3 wurde den Lernenden die vorliegende Situation verdeutlicht (Abb. 12).

4 Zusammenfassung

Die hier beschriebenen Unterrichtsstunden bildeten den Übergang zur allgemeinen Anwendung von Hüllkurven in Realsituationen und hatten die Förderung von mathematischen Modellierungskompetenzen, die Erweiterung des „einfachen Ableitungsbegriffs“ (partielle Ableitung) und die Bestimmung einer Hüllkurvengleichung als Ziel. Um dies sinnstiftend zu erreichen, ist es wichtig, dass viele Modellierungsentscheidungen bei den Schüler/inne/n verbleiben, wie z. B. die Festlegung des Koordinatensystems oder die Frage nach einer 2- oder 3-dimensonalen Darstellung des Garagentores.

Aufgrund der Nähe zur Erfahrungswelt der Schüler/innen (Internet und Forumsfragen, Platzproblematik etc.) bot das Garagentorproblem eine durch digitale Medien unterstützte Abwechslung zum üblichen Mathematikunterricht. Die Lernenden wurden in die Lage versetzt, sich mit einer über das Internet verbreiteten Fragestellung mathematisch auseinander zu setzen. Durch den Einsatz der Geometrie-Software GeoGebra konnte das Unterrichtsthema den Schüler/inne/n dynamisch aus verschiedenen Blickwinkeln verdeutlicht werden, sodass es auch leistungsschwächeren Lernenden möglich war, die Hüllkurve und deren charakteristische Eigenschaften interaktiv zu erkunden. Der zur Verfügung stehende GTR half darüber hinaus, „komplizierte“ Gleichungen schnell zu lösen, wo die

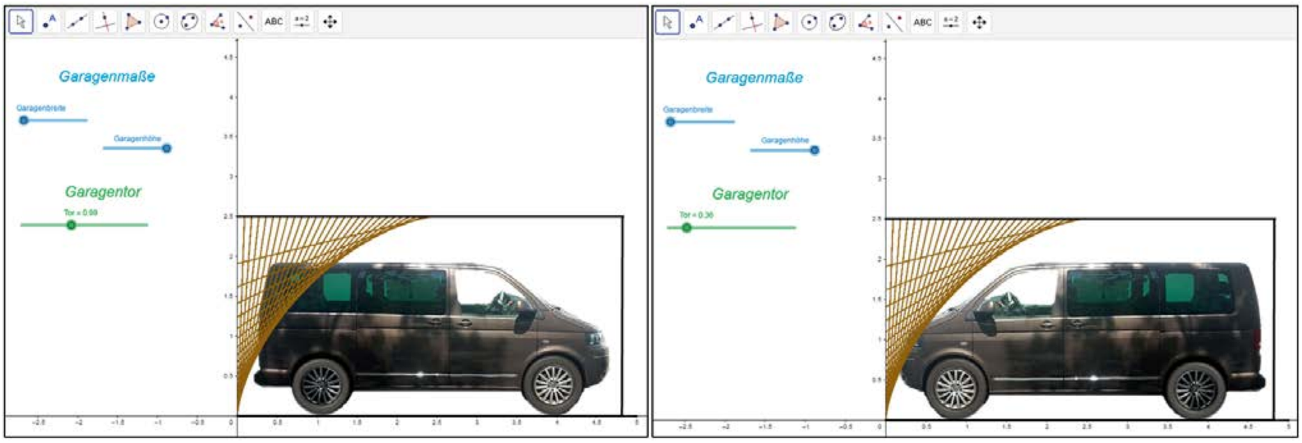

Abb. 12. Der Van wird beschädigt, wenn der Halter vorwärts in die Garage einparkt. Auch Rückwärtseinparken verhindert nicht, dass der Van beschädigt wird, wenn sich das Tor schließt

Schüler/innen in der Regel am fehlenden algebraischen „Handwerkszeugs" scheitern.
Die hier verwendeten GeoGebra-Dateien können gerne auf Nachfrage zur Verfügung gestellt werden.

Literatur

KMK, Sekretariat der Ständigen Konferenz der Kultusminister der Länder in der Bundesrepublik Deutschland (Hrsg.). (2012). *Bildungsstandards im Fach Mathematik für Allgemeine Hochschulreife. https://www.kmk.org/fileadmin/veroeffentlichungen_beschluesse/2012/2012_10_18-Bildungsstandards-Mathe-Abi.pdf* (05.06.2018).

Motor Talk. (2007). *Passt er in die Garage rein? http://www.motor-talk.de/forum/passt-er-in-die-garage-rein-t1308301.html* (05.06.2018).

Niedersächsisches Kultusministerium (Hrsg.). (2009). *Kerncurriculum für die gymnasiale Oberstufe – Mathematik. http://db2.nibis.de/1db/cuvo/datei/kc_mathematik_go_i_2009.pdf* (05.06.2018).

mit online www.mnu.de ergänzung

Candy Walter, Universität Hildesheim, Institut für Mathematik & Angewandte Informatik, Samelsonplatz 1, 31141 Hildesheim, candy.walter@uni-hildesheim.de